Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
1er Examen Parcial (30 %)
Sep-Dic 2017

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (8 ptos.) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left|\frac{|x+2|+1}{x^2+1}\right| \geq 1$$

Solución: Como

$$\left|\frac{|x+2|+1}{x^2+1}\right| = \frac{\big||x+2|+1\big|}{\big|x^2+1\big|} = \frac{|x+2|+1}{x^2+1}$$

entonces

$$\left|\frac{|x+2|+1}{x^2+1}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|x+2|+1}{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow |x+2|+1 \geq x^2+1 \Leftrightarrow |x+2| \geq x^2.$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{, si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{, si } x < -2 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty, -2)$

$$|x+2| \geq x^2 \Rightarrow -x-2 \geq x^2 \Rightarrow 0 \geq x^2+x+2 \Rightarrow 0 \geq \left(x+1/2\right)^2 + 7/4 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Si $x \in [-2, \infty)$

$$|x+2| \geq x^2 \Rightarrow x+2 \geq x^2 \Rightarrow 0 \geq (x-2)(x+1) \Rightarrow x \in [-2,\infty) \cap [-1,2] = [-1,2]$$

Así, la solución general es $x \in \emptyset \cup [-1,2] = [-1,2]$.

Pregunta 2. (7 ptos.) Halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2+3x}-2}$$

Solución: Notemos que x pertenece al dominio de f si, y sólo si, $25-x^2 \geq 0$, $x^2+3x \geq 0$ y $\sqrt{x^2+3x} \neq 2$. Como

$$25-x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [-5,5]$$

$$x^2+3x \geq 0 \Longleftrightarrow x(x+3) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-3] \cup [0,\infty)$$

$$\sqrt{x^2+3x} \neq 2 \Longleftrightarrow x^2+3x \neq 4 \Longleftrightarrow x^2+3x-4 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -4 \text{ y } x \neq 1$$

el dominio de f es el conjunto

$$\left([-5,5] \bigcap \left((-\infty,-3] \cup [0,\infty)\right)\right) \setminus \{-4,1\} = [-5,-4) \cup (-4,-3] \cup [0,1) \cup (1,5].$$

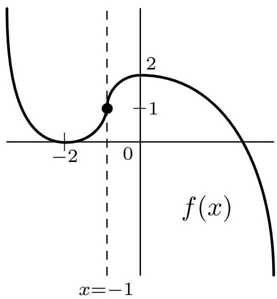
Pregunta 3. (7 ptos.) Dadas las funciones

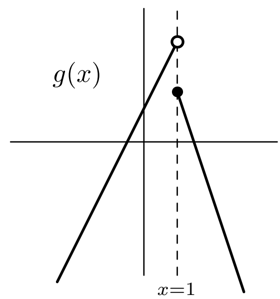
$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & , \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 2 & , \text{si } x \geq -1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \text{si } x < 1 \\ -3x + \frac{9}{2} & , \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a. Haga un bosquejo de las gráficas de las funciones;

b. Determine $f \circ g$.

Solución:





$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} \big(g(x)+2\big)^2 & , \text{si } g(x) < -1 \\ -\big(g(x)\big)^2 + 2 & , \text{si } g(x) \geq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(2x+3\big)^2 & , \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ \big(-3x + 13/2\big)^2 & , \text{si } x \in \big(11/6, \infty\big) \\ -\big(2x+1\big)^2 + 2 & , \text{si } x \in [-1, 1) \\ -\big(3x + 9/2\big)^2 + 2 & , \text{si } x \in \big[1, 11/6\big] \end{cases} \end{aligned}$$

Ya que,

$$\begin{aligned} g(x) < -1 &\iff 2x+1 < -1 \ \text{ y } \ x < 1 \quad \text{o} \quad -3x + 9/2 < -1 \ \text{ y } \ x \geq 1 \\ &\iff x \in \big(-\infty, -1\big) \cup \big(11/6, \infty\big) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(x) \geq -1 &\iff 2x+1 \geq -1 \ \text{ y } \ x < 1 \quad \text{o} \quad -3x + 9/2 \geq -1 \ \text{ y } \ x \geq 1 \\ &\iff x \in \big[-1, 1\big) \cup \big[1, 11/6\big]. \end{aligned}$$

Pregunta 4. (8 ptos.) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes que se pueden trazar a la circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 2 desde el punto $(-6, 0)$.

Solución: Si denotamos por (a, b) al punto de la circunferencia tal que la recta que pasa por los puntos $(-6, 0)$ y (a, b) es tangente a la circunferencia. Como esta recta es perpendicular a la recta que pasa por el punto (a, b) y por el centro de la circunferencia $\big($que es el punto $(-1,0)\big)$, el producto de sus pendientes vale -1. Así,

$$\frac{b-0}{a+6}\,\frac{b-0}{a+1}=-1 \quad\Longrightarrow\quad b^2=-(a+6)(a+1).$$

Como el punto (a,b) pertenece a la circunferencia, tenemos que

$$(a+1)^2+b^2=4.$$

Luego, combinando las dos ecuaciones obtenemos $a=-9/5$ y $|b|=\frac{2}{5}\sqrt{21}$. Como las rectas deseadas pasan por el punto $(-6,0)$ y sus pendientes valen $\frac{b}{a+6}$, tenemos que sus ecuaciones son

$$y=\frac{2}{\sqrt{21}}(x+6) \quad \text{y} \quad y=-\frac{2}{\sqrt{21}}(x+6).$$